بسمه تعالی

محاسبات عددی    نام ونام خانوادگی ......MASTER.......... شماره دانشجویی ..................    مدت امتحان: ۷۵ دقیقه

**سئوالات آخر ترم:**

۱- نحوه محاسبه $x_2$ ، $W_1$ و $W_2$ از فرمول زیر را برای ماکزیمم دقت بیان کنید.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = W_1 f(1) + W_2 f(x_2)$$

2 - جواب کامل معادله تفاضلی زیر را بدست آورید.

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n$$

$$\text{with} \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

3 - با توجه به جدول روبرو :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 50 | 48 | 0 | -64 | -90 | 0 |

a) $\int_0^6 f(x)\,dx$ را با روش ذوزنقه ای و $h=2$ حساب کنید.

b) $\int_0^6 f(x)\,dx$ را با روش ذوزنقه ای و $h=6$ حساب کنید.

c) با استفاده از روش رامبرگ و نتایج قسمت های a) و b) جواب دقیق تری را برای محاسبه انتگرال فوق ارائه دهید.

4 - دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را با یکی از دو روش خواسته شده حل کنید.

$$\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \{y\}$$

$$\text{with} \quad \{y(0)\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

i) حل دقیق دستگاه بروش تفکیک متغیرها

ii) ارائه حل بروش اویلر اصلاح شده (روش ذوزنقه ای!)

توجه کنید که جواب قسمت ii باید بصورت ماتریسی و تابعی از پارامتر مسئله، $h$، باشد!

{بارم سؤالات یکی است}

بسمه تعالی

سؤالات میان ترم

مدت امتحان ۶۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی

شماره دانشجویی

۵- دستگاه معادلات زیر را ملاحظه نمائید!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \{x\} = \{f\}$$

میخواهیم معادلات فوق را بروش تکراری $x = Tx + b$ حل نمائیم.

الف) بروش ژاکوبی $T_{JAC}$ را حساب کنید.

ب) بروش گوس سیدل $T_{gs}$ " " " .

ج) شعاع طیفی این دو ماتریس را حساب کنید. ۴ نمره

د) کدامیک از دو روش الف یا ب سریعتر همگرا خواهند بود؟ با ذکر دلیل!

ه) $T_{JOR}(\omega)$ و $T_{SOR}(\omega)$ را نیز بدست آورید.

۶- ثابت های $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ را طوری تعیین کنید که تابع $Q(x)$ c-spline طبیعی باشد. ۳ نمره

$$Q(x) = \begin{cases} \alpha(x-1)^3 + \beta(x-1)^2 + 12(x-1) + 1 : & 1 \leq x \leq 2 \\ \gamma x^3 + 18x^2 - 30x + 19 : & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

۷- برای هرکدام از توابع زیر یک تابع تکراری $g(x)$ و ناحیه $I$ را طوری بیابید که برای بدست آوردن کوچکترین ریشه مثبت تابع مسأله همگرا باشد. ۳ نمره

الف) $x^3 - x - 1 = 0 \rightarrow$

ب) $x - \tan x = 0$

$f(1) = -1 < 0$

$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0 \quad \underline{\underline{1 < r < 2}}$

$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \quad \text{for } x \in [1,2]$

$x = (x+1)^{1/3}$

$g(x) = (x+1)^{1/3}$

$g'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$

$= \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} < 1$

$\text{for } x \in [1,2]$

Pr. #1

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(1) + w_2 f(x_2)$$

Solution

$f(x) = 1 \rightarrow 2 = w_1 + w_2$    $c_2$

$= x \rightarrow 0 = w_1 + w_2 x_2$    $c_1$

$= x^2 \rightarrow \frac{2}{3} = w_1 + w_2 x_2^2$    $1$

Let $\pi(x) = x^2 + c_1 x + c_2 \rightarrow c_1 + c_2 + 1 = 0$    (1)

$2c_2 + \frac{2}{3} = 0$    (2)

باحل معادلات (1) و (2) $\leftarrow$

$c_2 = -\frac{1}{3}$

and

$c_1 = -\frac{2}{3}$

درنتیجه $\pi(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta' = 1 + 3 = 4 \Rightarrow x = \frac{1 \mp 2}{3} = 1, \ -\frac{1}{3}$

بنابراین

$W_2 = \frac{3}{2}$

$W_1 = \frac{1}{2}$

$X_1 = 1$

$X_2 = -\frac{1}{3}$

Ans $\boxed{\frac{1}{2} f(1) + \frac{3}{2} f(-\frac{1}{3})}$

Pr. # 2

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = (3)^n$$

with $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$r^2 - 4r + 4 = 0 \rightarrow r = 2, 2$

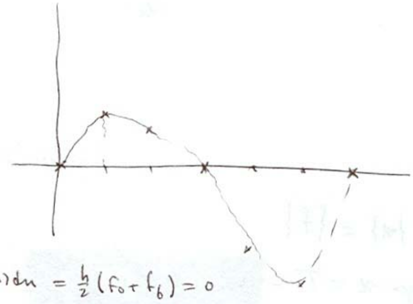
جواب کل $x_n = (c_1 + c_2 n) 2^n + 3^n$

imposing initial conditions!

$$\underline{\underline{x_n = 3^n - n(2)^n}}$$

Ans!!

Pr. # 3



b) $h = 6 \rightarrow \int_0^6 f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_6) = 0$

b) $h = 2 \rightarrow \int_0^6 f(x)dx = \frac{2}{2}\left[0 + 2(48) + 2(-64)\right] = -32$

c) <u>Romberg's Method</u>

$a\,( \quad I = T_a + C_2 h^2 + C_4 h^4 + \dots$

$b\,( \quad I = T_b + C_2 \frac{h^2}{9} + \dots$

and $\begin{cases} a + b = 1 \\ a + \frac{b}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{9}{8} \end{matrix}$

$I = \frac{9}{8}(-32) - \frac{1}{8}(0) = -36$ <u>Ans</u>

<u>Pr. # 4</u> $\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y$ with $y(0) = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$

(i) $\dot{y} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} y = 0 \rightarrow Kx = \lambda Cx \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow v_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \rightarrow v_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$y = \Phi u$

$\Rightarrow \Phi \dot{u} + K \Phi u = 0 \rightarrow \Phi^T \Phi \dot{u} + \Phi^T K \Phi u = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} u = 0 \rightarrow$ $u_1 = C_1 e^{-t}$

$u_2 = C_2 e^{-3t}$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 + u_2 \end{Bmatrix}$$

with initial conditions $y_0 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} c_1 - c_2 &= 3 \\ c_1 + c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 2e^{-t} + e^{-3t} \\ 2e^{-t} - e^{-3t} \end{cases}$$

(ii)

مسئله بالا را بروش اویلر اصلاح شده حل کنید ( روش ذوزنقه‌ای) .

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} (y_n + y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] y_n + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y_{n+1}$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] y_{n+1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] y_n$$

$$y_{n+1} = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{(2+h)(2+3h)} \begin{bmatrix} 4-3h^2 & 4h \\ 4h & 4-3h^2 \end{bmatrix} y_n$$

---

extra! روش اویلر .

$$y_{n+1} = y_n + h \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y_n = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] y_n$$

$$\Rightarrow \{y_{n+1}\} = \begin{pmatrix} 1-2h & h \\ h & 1-2h \end{pmatrix} \{y_n\}$$

Pr. #5 $\quad Ax = f$

(الف) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

روش ژاکوبی :

$$\{x\}_{k+1} = -D^{-1}(L+U)x_k + D^{-1}f$$

$$= -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T_{JAC}$$

(ب) $\{x\}_{k+1} = -(D+L)^{-1}U x_k + (D+L)^{-1} f$ روش گوس سیدل

$$D+L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (D+L)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_{gs} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

(ج.) شعاع طیفی $\quad T_j = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1/2 \\ -1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm 0.3535$$

ژاکوبی!

$\rho(A) = \max|\lambda| = 0.3535$

~~Spectral = $\sqrt{0.35}$ = 0.5946 < 1 ! روش ژاکوبی همگراست~~

$$T_{gs} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1/2 \\ 0 & 1/8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{1}{8} \end{matrix}$$

~~$S.R = \sqrt{\frac{1}{8}} = 0.3535$~~ $\quad$ شعاع طیفی $\quad \rho(A) = 0.125$

روش گوس سیدل سریعتر همگرا خواهد شد.

د

$$\boxed{\text{SOR} \quad (D+\omega L)x = [-\omega U + (1-\omega)D]x + \omega b}$$

JOR $\quad x = (1-\omega)x - \omega D^{-1}(L+U)x + \omega D^{-1} b$

$$\boxed{T_{JOR} = \omega T_{JAC} + (1-\omega) I}$$

B

**Pr. #6**

ثابت های $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ را بگونه ای تعیین کنید که $\varphi(x)$

تابع C-spline طبیعی باشد.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x-1)^3 + \beta(x-1)^2 + 12(x-1) + 1 & 1 \le x \le 2 \\ \gamma x^3 + 18x^2 - 30x + 19 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 3\alpha(x-1)^2 + 2\beta(x-1) + 12 \\ 3\gamma x^2 + 36x - 30 \end{cases} \rightarrow 3\alpha + 12 = 12\gamma + 72 - 30 \quad \boxed{\alpha = 2}$$

$$\varphi''(x) = \begin{cases} 6\alpha(x-1) + 2\beta \\ 6\gamma x + 36 \end{cases} \rightarrow \boxed{\beta = 0} \quad \text{C-spline طبیعی}$$

$$\rightarrow 18\gamma + 36 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = -2}$$

$$\varphi(x)\Big|_{@\, x=2} = \begin{cases} \alpha + \beta + 12 + 1 = 15 \\ -16 + 72 - 60 + 19 = 15 \end{cases}$$

با هم برابرند !!

---

**Pr. #7**

**Part b**

$x - \tan x = 0$

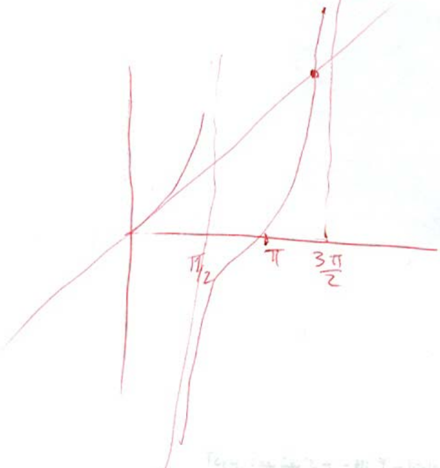
$x = \tan^{-1} x \Rightarrow g(x) = \tan^{-1}(x)$

$\tan g = x \Rightarrow g'(1 + \tan^2 g) = 1$

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

کنار $x = 4.49$

$|g'(x)| < 1$




$\dfrac{3(3.14)}{2} = 4.49$

مدت امتحان : ۷۵ دقیقه

2

بسمه تعالی

۱- سیستم معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

آیا روش ژاکوبی برای سیستم بالا همگرا است؟ حتما ثابت کنید.

۲- ثابت های $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ را بگونه ای تعیین کنید که تابع $Q(x)$ c-spline طبیعی باشد.

$$Q(x) = \begin{cases} \alpha (x-1)^3 + \beta (x-1)^2 + 12(x-1) + 1 : & 1 \le x < 2 \\ \gamma x^3 + 18x^2 - 30x + 19 : & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

3- بزرگترین ناحیه $I$ را با خاصیت زیر پیدا کنید:

برای تمام مقادیر $x_0 \in I$ و تابع تکراری $g(x) = x(2-ax)$

وقتی نقطه آغازی $x_0$ مسئله همگرا باشد.

$\frac{1}{2a} < x < \frac{3}{2a}$

4- برای هر کدام از توابع زیر، یک تابع تکراری $g(x)$ و ناحیه $I$ را بگونه ای بیابید که برای بدست آوردن کوچکترین ریشه مثبت تابع مسئله همگرا باشد.

الف) $x^3 - x - 1 = 0$

ب) $x - \tan x = 0$

Pr. #1

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -.25 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow Bx = \lambda x$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -.25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 0.5 = 0$$

$$\lambda = \pm 0.707$$

بنابراین شعاع طیفی $T_J = 0.707 < 1$

The Jacobi iteration will Converge!