MASTER

۱- نحوه بدست آوردن یکی از سه فرمول زیر را توضیح دهید.

i) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$

ii) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$

iii) $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$

۲- با استفاده از روش رامبرگ، انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

۳- جواب نهائی معادله تفاضلی زیر را بدست آورید.

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 1$$

with

$$y_0 = 1 \quad \text{and} \quad y_1 = 0$$

۴- با استفاده از سری تیلور مرتبه 3 مقدار تقریبی $X(0.1)$ را از معادله دیفرانسیل زیر حساب کنید.

$$h = 0.1$$

$$x'' = x^2 e^t + x'$$

$$x(0) = 1 \quad , \quad x'(0) = 2$$

بارم سؤالات یکسان است

مدت امتحان: یک ساعت.

Pr. # 4

$x'' = x^2 e^t + x' \longrightarrow x''(0) = e^0 + 2 = 3$

$x''' = 2xx'e^t + x^2e^t + x'' \rightarrow x'''(0) = 2(2)e^0 + e^0 + 3 = 8$

$t = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x' = 2 \ \text{and} \ h = 0.1$

$x(t+h) = x + hx' + \frac{h^2}{2!}x'' + \frac{h^3}{6}x'''$

$x(0.1) = x(0) + hx'(0) + \frac{h^2}{2}x''(0) + \frac{h^3}{6}x'''(0)$

$= 1 + 0.1(2) + \frac{(0.1)^2}{2}(3) + \frac{(0.1)^3}{6}(8)$

$= 1 + 0.2 + \cancel{0.00133} \ 0.015 + 0.00133 = 1.21633$

Pr. # 1

(i) $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

$x = x_n + \alpha h$

$$\begin{array}{ccc} x_{n-1} & x_n & x_{n+1} \\ \alpha = -1 & \alpha = 0 & \alpha = 1 \end{array}$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx$$

$$y_{n+1} - y_n = h \int_0^1 P_n(x_n + \alpha h)\,d\alpha$$

But, $\int_0^1 P_n(x_n+\alpha h)\,d\alpha = \int_0^1 (f_n + \alpha \nabla f_n)\,d\alpha$

$$= f_n + \tfrac{1}{2}\nabla f_n = f_n + \tfrac{1}{2}(f_n - f_{n-1})$$
$$= \tfrac{3}{2} f_n - \tfrac{1}{2} f_{n-1}$$

بنابراین $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(3f_n - f_{n-1}\right)$

Pr. #3

$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 1$

with $y_0 = 1$ and $y_1 = 0$

Solution: $\beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = 1, 1$

$y_H = C_1 + C_2 k$

درنتیجه $\quad y_p = C_3 k^2$

$C_3(k+2)^2 - 2C_3(k+1)^2 + C_3 k^2 = 1 \Rightarrow C_3 = 1/2$

یعنی $\quad y_k = C_1 + C_2 k + 1/2\, k^2$

$y_0 = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$y_1 = 1 + C_2 + 1/2 = 0 \Rightarrow C_2 = -3/2$

درنتیجه جواب بیان میشود

$$\boxed{y_k = 1 - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}k^2}$$

Pr. #1 iii) $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = h\int_{-2}^{0}\left(f_{n+1} + \alpha\nabla f_{n+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 f_{n+1}\right)d\alpha$$

x_{n-1}, $\alpha = -2$ $\quad$ x_n, $\alpha = -1$ $\quad$ x_{n+1}, $\alpha = 0$

$x = x_{n+1} + \alpha$

$dx = h\,d\alpha$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[2f_{n+1} - 2\nabla f_{n+1} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1}\right]$$

$$2f_{n+1} - 2(f_{n+1} - f_n) + \frac{1}{3}\nabla(f_{n+1} - f_n)$$

$$\cancel{2f_{n+1}} - \cancel{2f_{n+1}} + 2f_n + \frac{1}{3}(f_{n+1} - f_n - f_n + f_{n-1})$$

$$\frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})}$$

Pr. #2

		$\frac{4}{3}m - \frac{1}{3}l$	$\frac{16}{15}m - \frac{1}{15}l$
$h = 1$	3		
$h = 1/2$	3.1	3.1333	
$h = 1/4$	3.13117647	3.14156862 7	3.14211764 2

$2 \quad \frac{2}{3} \quad 3 \quad \frac{4}{3}$