Steady state heat flow through long hollow circular cylinders can be described by the following ordinary differential equation.

$$\frac{d}{dr}(kA\frac{dT(r)}{dr}) + AQ = 0 \qquad r_i < r < r_0$$

$$T(r_i) = T_i\,; \quad T(r_0) = T_0$$

where r is the radial coordinate, $T(r)$ is the temperature, k is the thermal conductivity, Q is the heat generation per unit area, $A = 2\,\pi\,r\,L$ is the surface area, L is the length of the cylinder, r_i is the inner radius, and r_0 is the outer radius. The boundary conditions specify the temperature on the inside and outside of the cylinder respectively.

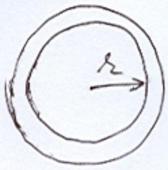
(a) Show that the following represents an exact solution for the problem for the case when $Q = 0$.

$$T(r) = T_i - (T_i - T_0)\frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_0/r_i)}$$

(b) Show that the following is an appropriate weak form for obtaining an approximate solution using the Galerkin weighted residual method.

$$\int_{r_i}^{r_0}\left(-kA\frac{dT}{dr}\frac{dw_i}{dr} + AQw_i\right)dr = 0$$

Where w_j, $j = 1, 2, \ldots$ are the Galerkin weighting functions.



$$\frac{d}{dr}\left(KA\,\frac{dT}{dr}\right) + AQ = 0$$

اثبات فرمول :

$$T(r_i) = T_i \;;\; T(r_o) = T_o$$

$$-KA\,\frac{dT}{dr}\Big|_r + A\,\Delta r\,Q = -KA\,\frac{dT}{dr}\Big|_{r+\Delta r}$$

where $\boxed{A = 2\pi r L}$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{KA\,\frac{dT}{dr}\Big|_{r+\Delta r} - KA\,\frac{dT}{dr}\Big|_r}{\Delta r} + AQ = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(KA\,\frac{dT}{dr}\right) + AQ = 0 \qquad r_i < r < r_o$$

$$T(r_i) = T_i \;;\; T(r_o) = T_o$$

for $Q = 0$

$$\frac{d}{dr}\left(KA\,\frac{dT}{dr}\right) = 0 \;\rightarrow\; KA\,\frac{dT}{dr} = c_1' \qquad (A = 2\pi r L)$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1'}{2K\pi L r} \;\Rightarrow\; T(r) = c_1 \ln r + C_2$$

B.Cs :

$$\begin{cases} T(r_i) = T_i \\ T(r_o) = T_o \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} T_i = c_1 \ln r_i + C_2 \\ T_o = c_1 \ln r_o + C_2 \end{array} \Rightarrow T_o - T_i = c_1 \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

$$c_2 = T_i - (T_o - T_i)\,\frac{\ln r_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

$$T = \frac{T_o - T_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln r + T_i - (T_o - T_i)\,\frac{\ln r_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

$$\boxed{T = T_i - (T_i - T_o)\,\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}}$$

$$T = T_i - (T_i - T_0)\,\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

(*) $$\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 700 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1200 & -5 \\ 700 & 12 \end{vmatrix}}{71} = \frac{14400 + 3500}{71} = 252.11$$

exact $$T(2) = 400 - 300\,\frac{\ln 2}{\ln 4} = 400 - 150 = \underline{250}$$

$$T_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1200 \\ -5 & 700 \end{vmatrix}}{71} = \frac{5600 + 6000}{71} = 163.38$$

exact $$T(3) = 400 - 300\,\frac{\ln 3}{\ln 4} = 162.25$$

<u>Lewis</u> — حل اجزای محدود با استفاده از فرمول کتاب (i)

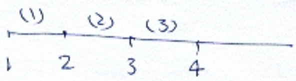
$$k = \int_{\Omega} [B]^T [D][B]\, d\Omega + \int_{A_s} h [N]^T [N]\, dA_s$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi k}{l}\,\frac{r_i + r_j}{\cancel{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 2\pi r_o h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در مسئله بالا چون کنوکسیون نداریم برای 3 المان خطی ماتریس‌ها یکی می‌شود:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

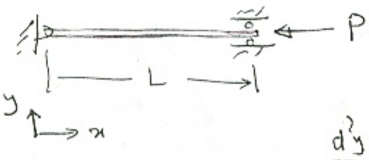
$$K_2 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad K_3 = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$$



Assembling Matrices ⇒

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & & \\ -3 & 8 & -5 & \\ & -5 & 12 & -7 \\ & & -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

After modifing Eq. (*) Results !!



2- برای مسأله کمانش روبرو، معادله دیفرانسیل زیر در دست است.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y=0$$

with $y(0)=y(L)=0$

الف) عبارت تابعی مسأله را بدست آورید (variational method)

ب) با استفاده از یک المان مربعی بار بحران P را حساب کرده و با جواب تئوری $P_{cr}=n^2\pi^2EI/L^2$ مقایسه کنید.

$$\int v\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y\right)dx=0$$

$$=v\frac{dy}{dx}\Big|_0^L-\int\left(\frac{dv}{dx}\frac{dy}{dx}-\frac{P}{EI}vy\right)dx \Rightarrow I=\int_0^L\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{P}{2EI}y^2\right]dx$$

همانگونه که در صفحه اول آمده.

4 نمره

$$\left[\frac{1}{3L}\begin{pmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{pmatrix}-\frac{PL}{30EI}\begin{pmatrix}4&2&-1\\2&16&2\\-1&2&4\end{pmatrix}\right]\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=\{0\}$$ 0/3

بعد از Modify کردن ⇐

$$\frac{16}{3L}y_2-\frac{16PL}{30EI}y_2=0$$

$$\left(\frac{16}{3L}-\frac{16PL}{30EI}\right)y_2=0$$

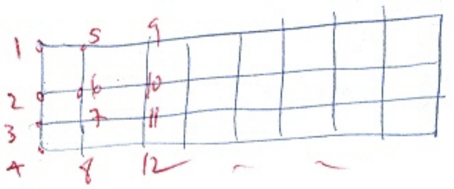
عبارت داخل پرانتز صفر است ⇐ 0/3 نمره

$$P=\frac{10EI}{L^2}$$

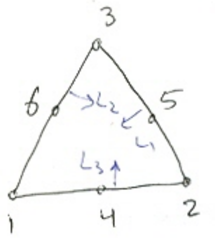
که کاملا نزدیک هم

جواب دقیق $P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{L^2}$

3- در مسائل دو بعدی برای کوچک کردن نوار ماتریسی "Bandwidth" چه باید کنیم؟ با رسم یک شکل ساده توضیح دهید.



همواره در جهتی شماره گذاری کنید که تعداد گره کمتر است (در جهت عرضی!)



4- در یک المان مثلثی 6 گرهی با تقارن محوری ، روش محاسبه انتگرال زیر را بنویسید . محاسبه انتگرال طولانی لازم نیست !

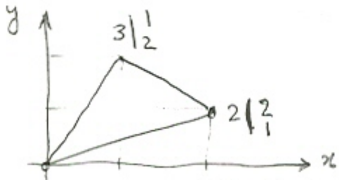
$$I = \iiint_V N_2 N_4 \, dV$$

$$N_2 = \underset{\overset{\Downarrow}{2}}{c}\, L_2 (L_2 - \tfrac{1}{2}) = L_2 (2L_2 - 1)$$

$$N_4 = 4 L_1 L_2 \qquad dv = 2\pi r \, dr \, dz$$

$$I = \iiint_V 4 L_1 L_2 (2L_2 - 1) \, dv = 2\pi \iint_A L_2 (2L_2 - 1)(4 L_1 L_2)(L_1 r_1 + L_2 r_2 + L_3 r_3) \, dA$$

که این انتگرال را از طریق فرمول ذکر شده در کتاب حساب می‌کنیم . برای جواب به کتاب خودتان مراجعه کنید !



5- در المان مثلثی روبرو :

$$T_1 = 10^\circ \; ; \; T_2 = 20^\circ \; , \; T_3 = 30^\circ$$

$(\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$ درجه حرارت نقطه‌ای واقع بر روی المان مختصات را پیدا کنید . مختصات نقاط گرهی المان بر روی شکل نیز داده شده است .

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3$$

$$\& \begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{5}{6} = 2N_2 + N_3 \\ \frac{7}{6} = N_2 + 2N_3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = \frac{1}{6} \\ N_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$N_1 = \frac{1}{3}$$

$$T = \frac{1}{3}(10) + \frac{1}{6}(20) + \frac{1}{2}(30) = \frac{65}{3} = 21.667$$

7- معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی آن داده شده است.

with $y'' = -1$
$y(0) = y(1) = 0$;

الف) عبارت فانکشنال مسئله را بدست آورید.

ب) با استفاده از مجموعه توابع خطی که از نقاط زیر گذشته و انتگرال مناسب را می‌نیمم کند، جواب مسئله را بدست آورید.

$(0,0)$, $(1/3, a)$, $(2/3, b)$, $(1,0)$

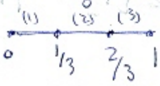
ج) چنانچه بجای منحنی‌های خطی فوق، از یک منحنی درجه 2 که از نقاط $(0,0)$, $(1/2, c)$, $(1,0)$ عبور کند استفاده کنیم پاسخ مسئله چه خواهد شد و کدام جواب دقیق‌تر خواهد بود و چرا؟

Solution

الف) $y'' + 1 = 0$, $\Rightarrow I = \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y \right] dx$

ب) ـــ المان خطی

$L = 1/3$, $[k^{(e)}] = \frac{D}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

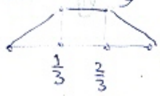


Assembly $\{f^{(e)}\} = \frac{QL}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/9 \\ 1/9 \end{Bmatrix}$$

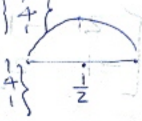
$\Rightarrow y_2 = y_3 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow a = b = \frac{1}{9}$



ج) $L = 1$

$k^{(e)} = \frac{D}{3L}\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$; $\{f^{(e)}\} = \frac{QL}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$



$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$16 y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{8} \rightarrow c = \frac{1}{8}$

extra!!

$N_2 = \frac{(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} = -4x(x-1)$

and $y = -4x(x-1)\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{x}{2}(x-1)$ **Ans**

exact Solution

$y'' = -1 \Rightarrow y' = -x + c \rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + cx + d$

$y(0) = 0 \rightarrow d = 0$

$c - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow c = 1/2$

$y = -\frac{x}{2}(x-1)$

جواب دقیق و اجزاء محدود یکی اند

بسمه تعالی

MASTER

۱ - در معادله دیفرانسیل زیر :

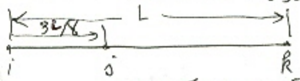
$$\frac{dy}{dx} + 2y - x = 0 \; ; \qquad y(x=0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

(20)

با استفاده از روش گالرکین ، جواب تقریبی مسأله را بدست آوریم . فرم تقریبی مسأله را بصورت

$\hat{y} = c_1 x + c_2 x^2$ فرض نمائید .

(10) 2 - تابع مبنا N_k را برای یک المان درجه ۲ ، Quadratic Element ، که گره j آن در فاصله $x = \frac{3L}{8}$ قرار گرفته است ، حساب کنید . از روش لاگرانژ و دستگاه مختصات محلی استفاده کنید .



(10) 3 - در مسأله 2 ، ترم k_{13} از ماتریس سختی $[k_D^{(e)}]$ را بدست آوریم .

(20) 4 - در مسأله 2 ، در صورتیکه $\Phi_i = 20$ ، $\Phi_j = 30$ و $\Phi_k = 40$ و $L = 4$ باشد ، مقدار $\frac{d\Phi}{dx}$ را در نقطه $x = L/2$ حساب کنید .

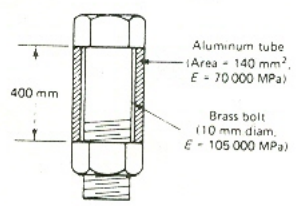
(10) 5 - نشان دهید که در یک المان مثلثی ، منحنی ثابت Φ خطی است مستقیم .

(20) 6 - مقادیر گرهی ، همراه با مختصات گره های آن برای یک المان مثلثی در جدول زیر آمده است .

الف) مقدار Φ را در نقطه A بمختصات (0.2 , .06) حساب کنید .

ب) مقادیر $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ و $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ را نیز برای این المان حساب کنید .

X_i	Y_i	X_j	Y_j	X_k	Y_k	Φ_i	Φ_j	Φ_k
.13	.01	.25	.06	0.13	.13	190	160	185



(20) 7 - یک پیچ برنجی داخل لوله آلومینیمی قرار گرفته است . پس از سفت شدن آن باندازه $\frac{1}{4}$ دور کامل آنرا محکم می کنیم . چنانچه پیچ یک نخ بوده و گام آن برابر با 2 میلیمتر باشد تنش ایجاد شده در پیچ و لوله را حساب کنید .

راهنمائی : شرائط مرزی آن بگونه ایست که بروش penalty بایستی مسأله را حل کنید .

بارم مسائل 1 ، 4 ، 6 ، 7 ، 20 است

مسائل 2 و 3 و 5 هرکدام نصف مسائل بالا

مدت امتحان ۲ ساعت

Ex. #1)

$\frac{dy}{dx} + 2y - x = 0$; $y(x=0) = 0$, $0 \le x \le 1$

$\tilde{y} = c_1 x + c_2 x^2$ (تابع تقریبی حل)

The exact solution is given by

$$y = \frac{1}{4}\left(2x - 1 + e^{-2x}\right)$$

$L\phi = f$

$\int (L\phi - f)\,\varphi_i\,dx = 0$; $i = 1, \dots, n$

$\frac{dy}{dx} + 2y = x$

$L = \frac{d}{dx} + 2$

$\int \{L(\sum c_j \varphi_j) - f\}\,\varphi_i\,dx = 0$

$L\varphi_1 = \left(\frac{d}{dx} + 2\right)(x) = 1 + 2x$

$L\varphi_2 = \left(\frac{d}{dx} + 2\right)(x^2) = 2x + 2x^2$

$\sum c_j \int \varphi_i\, L\varphi_j\,dx = \int f\,\varphi_i\,dx$

$\varphi_1 = x$

$\varphi_2 = x^2$ پس : داریم $y = c_1 x + c_2 x^2$

$\int_0^1 \varphi_1 L\varphi_1\,dx = \int_0^1 x(1+2x)\,dx = 7/6$

$\int_0^1 \varphi_1 L\varphi_2\,dx = \int_0^1 x(2x + 2x^2) = 7/6$

$\int_0^1 \varphi_2 L\varphi_1\,dx = \int_0^1 x^2(1+2x)\,dx = 5/6$.

$\int_0^1 \varphi_2 L\varphi_2\,dx = \int_0^1 x^2(1+2x)\,dx = 9/10$

$\cancel{7/6}\ \cancel{7/6}$ $\begin{pmatrix} 7/6 & 7/6 \\ 5/6 & 9/10 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^1 x^2\,dx = 1/3 \\ \int_0^1 x^3\,dx = 1/4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 0.107 \\ c_2 = 0.178 \end{matrix}$

$$\Rightarrow\ y = 0.107\,x + 0.178\,x^2$$

...ندسی مکانیک

سئوالات امتحانی میان ترم سال تحصیلی ۷۵-۷۴

نام درس : طراحی به کمک کامپیوتر نام استاد : رضا مسعودی لیث کد درس : ۲۶۹۷ گروه آموزشی : جامدات

تاریخ امتحان : ۷۵/۲/۱۹ مدت امتحان ۱ $\frac{1}{2}$ ساعت جزوه باز ☐ بسته ☑

MASTER

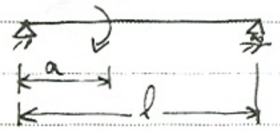
1 - مسئله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$ با شرایط مرزی زیر داده شده است.

$\phi = 0 \quad , x = 0$

$\frac{d\phi}{dx} - 2\phi + 0.5 = 0 \quad , x = 1$

فانکشنال این مسئله را پیدا کنید.

2 - تیر شکل زیر تحت تأثیر ممان M_0 قرار گرفته است. با استفاده از یک المان تیری معادلات لازم جهت حل مسئله را تشکیل دهید. از روش انرژی استفاده کنید.



3 - مسئله زیر را به هر دو روش Galerkin و variational حل کنید.

$-\phi'' = 1$

$\phi(0) = 0$

$\phi(1) + \phi'(1) = 1/2$

تنها از یک المان Quadratic استفاده کنید و با جواب دقیق مسئله در کل ناحیه مقایسه کنید.

4 - بطور اختصار به سؤالات زیر پاسخ دهید.

a) روش اجزاء محدود چیست؟ و تفاوت آن را با تفاضلات محدود بیان کنید.

b) روش Penalty چگونه است؟

c) Modify کردن معادلات در رابطه با چیست؟

d) توابع مبنا یا Shape function

e) فهرست مطالب گفته شده در کلاس را بطور اختصار بیان کنید.

بارم هر سؤال ۵ نمره

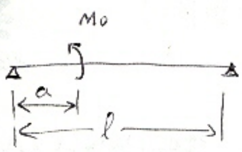
$$0 = \int_0^1 v \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx = v \frac{d\varphi}{dx}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dv}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\, dx$$

$$= v(1)\, \frac{d\varphi}{dx}(1) - \int \frac{dv}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\, dx$$

$$= v(1)\left(2\varphi(1) - 0.5\right) - \int \frac{dv}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx - \varphi^2(1) + 0.5\,\varphi(1)}$$

Pr. #2



$$\phi_1(x) = \frac{1}{l^3}\left[l^3 - 3lx^2 + 2x^3\right]$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{l^2}\left[l^2 x - 2lx^2 + x^3\right]$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{l^3}\left[3lx^2 - 2x^3\right]$$

$$\phi_4(x) = \frac{1}{l^2}\left(-lx^2 + x^3\right)$$

$$\Pi_p = \int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx - M_0\theta_a$$

$$= \int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx - M_0\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dx} = \dfrac{1}{l^3}\left[-6lx + 6x^2\right] = \dfrac{6a}{l^3}(a - l) \\[2ex] \dfrac{d\phi_2}{dx} = \dfrac{1}{l^2}\left[l^2 - 4lx + 3x^2\right]\Big|_{x=a} = \dfrac{1}{l^2}\left(l^2 - 4la + 3a^2\right) \\[2ex] \dfrac{d\phi_3}{dx} = \dfrac{1}{l^3}\left[6lx - 6x^2\right] = \dfrac{1}{l^3}\left(6la - 6a^2\right) \\[2ex] \dfrac{d\phi_4}{dx} = \dfrac{1}{l^2}\left(-2lx + 3x^2\right)\Big|_{x=a} = \dfrac{1}{l^2}\left(-2la + 3a^2\right) \end{cases}$$

$$v = [N]\{U\} \rightarrow$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \left[\frac{dN}{dx}\right]\{U\}$$

$$M_0\theta_0 = M_0\left[\frac{dN}{dx}\right]_{x=a}\{U\}$$

$$\cancel{\frac{\partial \Pi_p}{\partial\{U\}} = [k]\{q\} - M_0\{q\}^T \begin{Bmatrix} d\phi_1/dx \\ d\phi_2/dx \\ d\phi_3/dx \\ d\phi_4/dx \end{Bmatrix}}$$

توابع شیب

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{NE}\left[\int \frac{EI}{2}\{U\}^T[B]^T[B]\{U\}\,dx - M_0\{U\}^T\left\{\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=a}\right\}\right.$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial\{U\}} = \sum_{e=1}^{N.E.}\left[EI\,[B]^T[B]\,dx\;\{U\}\right] - M_0\left\{\frac{d\phi}{dx}\right\}_{x=a} \Rightarrow$$

or

$$[K]\{U\} = M_0 \left\{ \frac{d\phi}{dx} \right\}_{x=a}$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \frac{d\phi_2}{dx} \\ M_0 \frac{d\phi_4}{dx} \end{Bmatrix}_{x=a}$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Det} = (16l^4 - 4l^4) \frac{E^2 I^2}{l^6} = \frac{12 E^2 I^2}{l^2}$$

در نتیجه

$$\alpha_1 = \frac{l}{12EI} (4f_2 - 2f_4)$$

and

$$\alpha_2 = \frac{l}{12EI} (4f_4 - 2f_2)$$

$$-\phi'' = 1 \qquad \phi'' + 1 = 0$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(1) + \phi'(1) = 1/2$$

$$\phi'' + 1 = 0$$

$$0 = \int_0^1 v(\phi'' + 1)\,dx$$

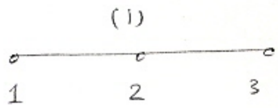
$$= v\frac{d\phi}{dn}\Big|_0^1 - \int\left(\frac{dv}{dn}\frac{d\phi}{dn} - v\right)dx$$

$$= v(1)\frac{d\phi}{dx}(1) - \int_0^1\left(\frac{dv}{dn}\frac{d\phi}{dn} - v\right)dx$$

$$= v(1)\left(1/2 - \phi(1)\right) - \int_0^1\left(\frac{dv}{dn}\frac{d\phi}{dn} - v\right)dx \qquad \phi = N\,\Phi$$

$$\Rightarrow \chi = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dn}\right)^2 - \phi\right)dx + \frac{1}{2}\phi_1^2 - \frac{1}{2}\phi_1$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial\phi} = \int_0^1 B^T B\,dx - \int_0^1 (N)^T\,dx$$



$$k = \frac{D}{3l}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \frac{QL}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 10 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{\phi_2 = \frac{}{\begin{vmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 8 \end{vmatrix}}}$$

$$\phi_2 = \frac{\cancel{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}}{64 - 32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

$$\phi_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

جوابها درست اند

$$N_2 = -4x(x-1)$$
$$N_3 = x(2x-1)$$

$$\phi = -4x(x-1)\,\frac{3}{8} + \frac{x}{2}(2x-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-3x(x-1) + x(2x-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-3x^2 + 3x + 2x^2 - x\right) = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 2x\right) = x - x^2/2$$

که همان جواب دقیق است

Galerkin's Method

$$\phi'' + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad D\frac{d^2\phi}{dx^2} + Q = 0$$

$$\{R^{(e)}\} = \{I^{(e)}\} + [k^{(e)}]\{\Phi^{(e)}\} - \{f^{(e)}\}$$

$$[k^{(e)}] \to D B^T B \qquad \{f^{(e)}\} \to Q[N]^T$$

$$\{I^{(e)}\} \to \begin{Bmatrix} D\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=x_i} \\ -D\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=x_j} \end{Bmatrix}$$

$$\{I^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} D\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=x_i} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -D\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=x_j} \end{Bmatrix}$$

$$\{I_b^{(e)}\} = \{I_i^{(e)}\} + \{I_b^{(e)}\}$$ با شرط (1) :

$$\{I_b^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_k(1) - 1/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$I_{(b)}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

ماتریس کلی

$$K = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7+3 \end{bmatrix} \quad ; \quad f = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

که همان روش functional × ۳ است

$$\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 10 \end{bmatrix} \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

بسمه تعالی MASTER

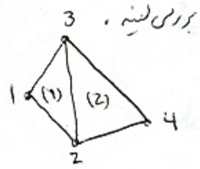
اجزاء محدود تیر ماه ۷۹

۱- توضیح دهید که چرا المان مستطیلی، Rectangular Element، مناسب ترین المان برای مسائل دو بعدی نیست.

۲- تابع مبنا N_j را برای یک المان مربعی Quadratic Element، که گره j آن در فاصله $x = \frac{3L}{8}$ قرار گرفته است، حساب کنید.

3- با استفاده از فرمول (2)، ترم k_{22} از ماتریس کلی را بدست آورید. ضریب G از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را صفر در نظر بگیرید.

4- برای دو المان مثلثی شکل زیر، پیوستگی ϕ را در امتداد ضلع مشترک 2-3 بررسی کنید.



5- مقدار انتگرال زیر برای یک المان مثلثی چه میشود؟

$$I = \int_A x \, dx \, dy$$

6- مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید.

$$-\phi'' = 2 , \quad 0 < x < 1$$
$$\phi(0) = \phi'(1) = 0$$

با استفاده از یک المان مربعی مقدار ϕ را در ناحیه داده شده بدست آورید و با جواب دقیق آن مقایسه کنید.

7- تابع $u(x)$ را طوری بیابید که انتشرال:

$$I = \int_0^1 (u'^2 + 12ux) \, dx$$
$$u(0) = 0 , \quad u(1) = 1$$

مینیمم گردد. مقدار مینیمم I را نیز حساب کنید و نشان دهید که هر تابع دیگری را که شرایط مرزی در آن صدق کند، مقداری برای عبارت I خواهد داد که از مقدار مینیمم حساب شده بیشتر خواهد بود.

8- بطور اختصار به سؤالات زیر پاسخ دهید.

a) روش اجزاء محدود چیست؟ وتفاوت آنرا با تفاضلات محدود بیان کنید.

b) روش Penalty چگونه است؟

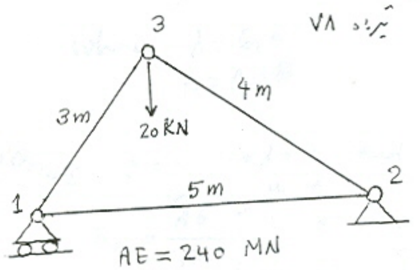
c) Modify کردن معادلات در رابطه با چیست؟

d) فهرست مطالب گفته شده در کلاس را بطور اختصار بیان کنید.

بارم سؤالات یکی است
موفق باشید. [illegible]

باسمه تعالی

تیرماه ۷۸ طراحی به کمک کامپیوتر MASTER



۱- با استفاده از روش ماتریس سختی تغییر مکان گره 3 و نیروهای هر عضو را حساب کنید. حاصلضرب AE برای هر عضو 240 MN است.

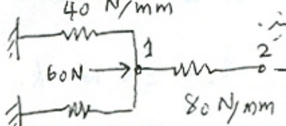
2- معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$ با شرایط مرزی زیر داده شده است.

$\phi = 0 \quad , \quad x = 0$

$\frac{d\phi}{dx} - 2\phi + 0.5 = 0 \quad , \quad x = 1$

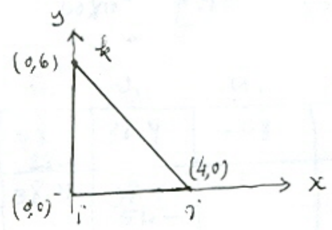
فانکسیونل این مسئله را پیدا کنید.

3- در مسئله زیر، تغییر مکان گره‌های 1 و 2 را حساب کنید. ابتدا ماتریس سختی هر المان را بدست آورده و با محاسبه ماتریس سختی نهائی و اعمال شرائط مرزی کار حل مسئله را دنبال کنید.



4- مسئله 3 را با روش Penalty حل کنید. توجه کنید که حل دستی، لازم نیست و تنها تشکیل معادلات کافیست.

5- توضیح دهید که چرا المان مستطیلی، Rectangular Element، مناسب ترین المان برای مسائل دو بعدی نیست.



6- برای المان مثلثی شکل روبرو:

الف) توابع شکل را حساب کنید.

ب) اگر درجه حرارت در نقاط گرهی، $T_i = 50^{\circ}C$ و $T_j = 75^{\circ}C$ و $T_k = 95^{\circ}C$ باشد، درجه حرارت را در نقطه (1,3) را پیدا کنید

ج) در نقطه (1,3)، $\frac{\partial T}{\partial x}$ را حساب کنید. از مقادیر گرهی داده شده استفاده کنید.

نمره مسائل 1، 2، 3 و 6 هر کدام 4 نمره
نمره مسائل 4 و 5 هر کدام 2 نمره
وقت امتحان: 2 ساعت

توجه:
دانشجو(یان) میتوانند از یک برگ A4 حاوی فرمول‌ها استفاده کنند.

مدت امتحان:
2 ساعت:

بسمه تعالی

CAD

تیرماه 83:

نام و نام خانوادگی: MASTER

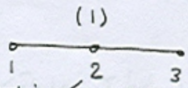
شماره دانشجویی: ------

1- معادله دیفرانسیل زیر همراه با شرایط مرزی آن داده شده است.

$$-\phi'' = 2$$

15 نمره

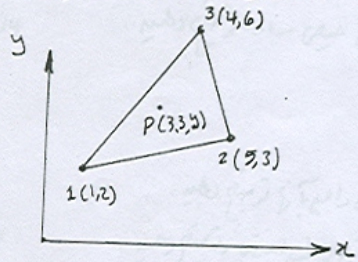
$$\phi(0)=0 \quad ; \quad 2\phi(1)+\phi'(1)=0$$



الف) عبارت فانکشنال آن را بدست آورید.

ب) با دیگر تقریب المان مرتبه دوم، Quadrati Element، آن را حل کنید و جواب نقاط گرهی را بدست آورید.

ج) جواب بدست آمده را با جواب دقیق مسئله در کل ناحیه مقایسه کنید و در صورت داشتن یا نداشتن اختلاف توجیهی برای هر حالت پیدا کنید.



2- مختصات گرهی المان مثلثی در شکل روبرو نشان داده شده است.

5 نمره

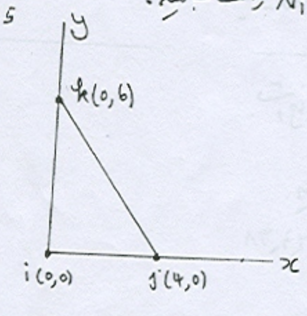
در نقطه درونی P، مختصات x آن برابر است با 3.3 و همینطور تابع مبنای آن $N_1 = 0.3$.

توابع مبنای N_2 و N_3 و مختصات y نقطه P را حساب کنید.

5 نمره

3- در المان مثلثی شکل روبرو، با استفاده از خواص توابع شکل، تابع شکل N_i را حساب کنید.

(استفاده از روابط a_i، b_i و c_i لازم نیست)



4- برابری زیر را اثبات کنید.

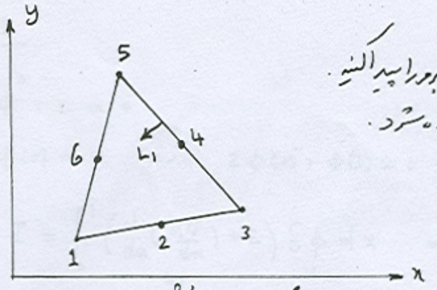
5 نمره

الف) $\sum N_i = 1$

ب) $\sum N_i x_i = x$

4 نمره

۵ - دو تا از توابع شکل المان مثلثی روبرو را پیدا کنید.
از مختصات L_1 و L_2 استفاده شود.



المان مثلثی، توابع شکل درجه ۲

4 نمره

۶ - در رابطه آشنای ماتریس زیر توضیح دهید که ضریب $\frac{D}{3L}$ چگونه بدست آمده است!

$$[k]^{(e)} = \frac{D}{3L}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

4 نمره

۷ - از روش Penalty چه میدانید؟ با ذکر یک مثال خیلی ساده توضیح دهید.

۸ - سؤالات زیر را بطور اختصار پاسخ گوئید.

الف) دستگاه مختصات گفته شده در کلاس را نام برده و خواص هر یک را توضیح دهید.

۶ نمره

ب) روش اجزاء محدود چیست؟ تقسیمات گفته شده این روش را بطور اختصار توضیح دهید.

ج) چرا در المان مثلثی مشتق ثابت یک خطی است مستقیم؟

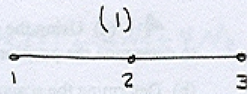
د) توضیح دهید که چرا المان مستطیلی Rectangular Element، مناسب ترین المان برای مسائل دو بعدی نیست و محدودیت آن همراه با المان مثلثی چیست؟

داشتن یک ورق A4 حاوی فرمولها نه حل مسئله در سر جلسه بلامانع است.

موفق باشید

۸۳/۴/۳

Pr. # 1



$$\phi'' + 2 = 0$$

$$\phi(0) = 0 \quad ; \quad 2\phi(1) + \phi'(1) = 0$$

$$\delta I = \int_0^1 \Big(\frac{d}{dx}\big(\underbrace{\frac{d\phi}{dx}}_{dv}\big) + 2 \Big) \underbrace{\delta\phi}_{u} \, dx = 0$$

$$= \frac{d\phi}{dx}\delta\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d\phi}{dx}\,\delta\Big(\frac{d\phi}{dx}\Big)\,dx + \int_0^1 2\,\delta\phi\,dx$$

$$= -2\phi(1)\,\delta\phi(1) - \delta\int_0^1 \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{d\phi}{dx}\Big)^2 - 2\phi\Big)\,dx$$

$$= -\delta\Big[\phi^2(1) + \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{d\phi}{dx}\Big)^2 - 2\phi\Big]\,dx\Big]$$

$$\Rightarrow \chi = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{d\phi}{dx}\Big)^2 - 2\phi\Big]\,dx + \cancel{\phi(1)}\ \phi^2(1)$$

$$[k^{(e)}] = \frac{D}{3l}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 13 \end{bmatrix} \quad (-$$

from mixed B.C.

$$\{f^{(e)}\} = \frac{Ql}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{7} & \cancel{-8} & \cancel{1} \\ \cancel{-8} & 16 & -8 \\ \cancel{1} & -8 & 13 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_2 = 5/12 \\ \Phi_3 = 1/3 \end{cases}$$

$$N_2 = -4x(x-1)$$

$$N_3 = x(2x-1)$$

$$\phi = -\frac{5}{3}x(x-1) + \frac{x}{3}(2x-1)$$

$$= -x^2 + \frac{4}{3}x$$

which is the exact Solution